חדו"א 1מ' -- 104010

מבחן מועד 'א , קיץ תשס"א – 14.9.01

שם פרטי: | | | | | | | | שם משפחה: | | | | | | | | | | |

מספר סטודנט: | | | | | | | | | |

- משך הבחינה שולש שעות.
- אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון.
- אין לפרק את השאלון, ויש להחזיר אותו בשלמותו בתום הבחינה.
- בבחינה שלושה חלקים: בחלק א' 5 שאלות, בכל סעיף הטענה נכונה או לא נכונה. הקף בעיגול את התשובה המתאימה. בחלק ב' 6 שאלות, בכל סעיף יש לכתוב תשובה סופית ולצרף לה חישב או נימוק קצר. בחלק ג' 2 שאלות עליהן יש לענות באופן מלא ומנומק הייטב.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	
שאלה 5	
שאלה 6	
שאלה 7	
שאלה 8	
שאלה 9	
שאלה 10	
שאלה 11	
שאלה 12	
שאלה 13	
סה"כ	

חלק א'

בכל סעיף הקף את התשובה הנכונה בעיגול. ערכה של לכל תשובה נכונה הוא 2.5 נקודות. בכל שאלה יכולים להיות כמה סעיפים נכונים.

שאלה 1: המערכת

$$\begin{cases} x = t^3 + 4t - 2 \\ y = \cos(2t) \end{cases}$$

מגדירה פונקציה $y = f(x)$ עבור כל x.

א. $f(-2) = 0$. נכון | לא נכון

ב. $f(x)$ חסומה לכל x. נכון | לא נכון

ג. המשיקים לגרף $y = f(x)$ בנקודה $x = 3$ ובנקודה $x = -7$ $(t = \pm 1)$ מקבילים זה לזה. נכון | לא נכון

ד. $x = -2$ נקודת מקסימום מקומית של $f(x)$. נכון | לא נכון

שאלה 2: נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\ln|x|)^2} & , x \neq 0, x \neq \pm 1 \\ 1 & , x = 0, x = \pm 1 \end{cases}.$$

א. האינטגרל הלא אמיתי $\int_0^{\frac{1}{e}} f(x)dx$ מתכנס. נכון | לא נכון

ב. f אינטגרבילית רימן בקטע $[1, 2]$. נכון | לא נכון

ג. הגבול $\lim_{n\to\infty} n \int_n^{n+1} f(x)dx$ אינו קיים. נכון | לא נכון

ד. אם $a_n = f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הטור מתכנס. נכון | לא נכון

שאלה 3: נתונה הפונקציה

$$f(x) = \int_0^x \frac{t}{2+\cos t}dt.$$

א. $\lim_{n\to\infty} nf(\frac{1}{n}) = 1$. נכון | לא נכון

ב. $|f(x)| \le \frac{x^2}{2}$ עבור $|x| \le 1$. נכון | לא נכון

ג. הפונקציה

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x^2} & , x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & , x = 0, \end{cases}$$

גזירה בנקודה $x = 0$. נכון | לא נכון

ד. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{6}$. נכון | לא נכון

שאלה 4: נתונה סדרת מספרים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \ge 0$ וכך שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos(a_n))$ מתכנס. נכון | לא נכון

ב. אם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, אז $q < 1$. נכון | לא נכון

ג. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{1+a_n}\right)$ מתבדר. נכון | לא נכון

ד. רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}n^2a_n(\frac{x}{2})^n\right)$ גדול או שווה מ - $\frac{1}{2}$. נכון | לא נכון

שאלה 5: נתונה סדרת פונקציות $f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}$, הפונקציה $f(x)$ מוגדרת על ידי הגבול $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ לכל x שעבורו הגבול קיים (במובן הצר).

א. $f(x)$ מוגדרת עבור $0 \le x < 1$. נכון | לא נכון

ב. $f(x)$ מוגדרת עבור $0 \ge x$. נכון | לא נכון

ג. $f_n(x)$ מתכנסת ל $f(x)$ במידה שווה בקטע $[2,\infty)$. נכון | לא נכון

ד. $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0$. נכון | לא נכון

חלק ב'

כתב תשובה סופית וצרף לה חישוב או נימוק קצר. ערכה של לכל תשובה נכונה הוא 5 נקודות.

שאלה 6: חשב

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sin x}{x+\cos(3x)+e^{-x}}.$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos(3x)}{x}+\frac{e^{-x}}{x}} = \frac{1-0}{1+0+0} = 1$$

שאלה 7: חשב

$$\int_4^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx.$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x\Big|_4^9 - 2\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= 6\ln(9) - 4\ln 4 - \sqrt{x}\Big|_4^9$$

$$= 2\ln\frac{3^6}{2^4} + 2 - 3 = 2\ln\frac{3^6}{2^4} - 1$$

שאלה 8: מצא תחום התכנסות של טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n}+\frac{3^n}{n^2}\right)x^n.$$

$$\sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}+\frac{3^n}{n^2}} \le \sqrt[n]{\frac{2\,3^n}{n}}$$

לפי סנדוויץ'

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n}+\frac{3^n}{n^2}} = 3$$

לכן $R=\frac{1}{3}$.

ב- $x=\pm\frac{1}{3}$ יש התבדרות גבולית לכן

רדיוס התכנסות $-\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{3}$.

שאלה 9: מצא ערכים של a ו b כך שהפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\cos(ax+b) & ,\ x>0\\ x^2 & ,\ x\le 0\end{cases}$$

תהיה גזירה בנקודה $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\cos(ax+b) = \cos(b)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$$

רציפות $\Leftrightarrow \cos(b)=0$ מתקיים אם ורק אם $\boxed{b=\frac{\pi}{2}}$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -a\sin\left(ax+\frac{\pi}{2}\right) = -a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x = 0$$

גזירות $\Leftrightarrow \boxed{a=0}$.

שאלה 10: תן דוגמה, או הראה שלא קיימות, שתי סדרות מספרים $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חיוביות, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$, ו
$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{b_n}} = 1$.

לדוגמה $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n}$, אזי

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

ואזי

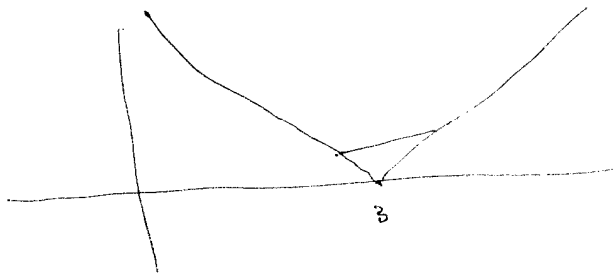
$$1 \le \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \le e^{\frac{1}{n}}$$

לפי סנדוויץ' , $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$

שאלה 11: תן דוגמה, או הראה שלא קיימת, פונקציה $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ קמורה ורציפה עבור כל x, ושאינה גזירה בנקודה $x = 3$.

$$f(x) = |x-3|$$

אינה גזירה ב- $x=3$ ובמובן רציפה.



כמו כן המיתר מעל הגרף,

$$f(ta+(1-t)b) \le t f(a) + (1-t) f(b)$$

לכל $0 \le t \le 1$ ולכל a ו- b.

חלק ג'

בחלק זה יש לכתוב פתרון מלא לכל השאלות. בכל תשובה יש להקפיד על ניסוח מדוייק, ולנמק את כל הצעדים.
לצד כל שאלה רשום משקלה.

שאלה 12:

א. (4 נק') הגדר את המושג $f_n(x)$ מתכנסת ל $f(x)$ במידה שווה בקטע $[a,b]$.

f_n מתכנסת ל f במידה שווה

ב. (8 נק') הוכח שאם $f_n(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ אז $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

א. לכל $\varepsilon > 0$, קיים N טבעי כך ש
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ לכל $n > N$ ולכל $x \in [a,b]$.

1. $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ל $f(x)$, $f_n(x)$ רציפות,
אז לפי משפט $f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ ולכן
אינטגרבילית.

נגדיר $C_n = \int_a^b f(x)dx$, אז לכל $\varepsilon > 0$ בריר
למצוא N כך ש $|C_n - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$ לכל $n > N$,
נשתמש בהגדרת התכנסות במידה שווה עם $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$.

אז

$$\left|C_n - \int_a^b f(x)\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

$$< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon .$$

סוף.

שאלה 13: (8 נק') תהי $f : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ רציפה בקטע $[0,\infty)$, גזירה בקטע $(0,\infty)$ ומקיימת $f(0) = 0$ ו $0 < f'(x) \leq 1$. הראה כי

$$2\int_0^x f(t)dt \geqslant f^2(x).$$

נתון: נגדיר $g(x) = 2\int_0^x f(t)dt - f^2(x)$.

אז $g(0)=0$ ולכן מספיק להראות ש $g'(x)\geq 0$, $(x>0)$.

$$g'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) =$$
$$= 2f(x)\left(1 - f'(x)\right)$$

לפי הנתון $1-f'(x)\geq 0$. לכן מספיק להראות ש $f(x)\geq 0$ לכל $x\geq 0$.

אמת לא, אז קיים $x_0>0$ כך ש $f(x_0)=0$ ואז לפי משפט רול. קיימת נקודה $0<c<x_0$ כך ש $f'(c)=0$ וזה סתירה לנתון.
לכן $f(x)\geq 0$ ומכאן ש $g(x)\geq 0$.